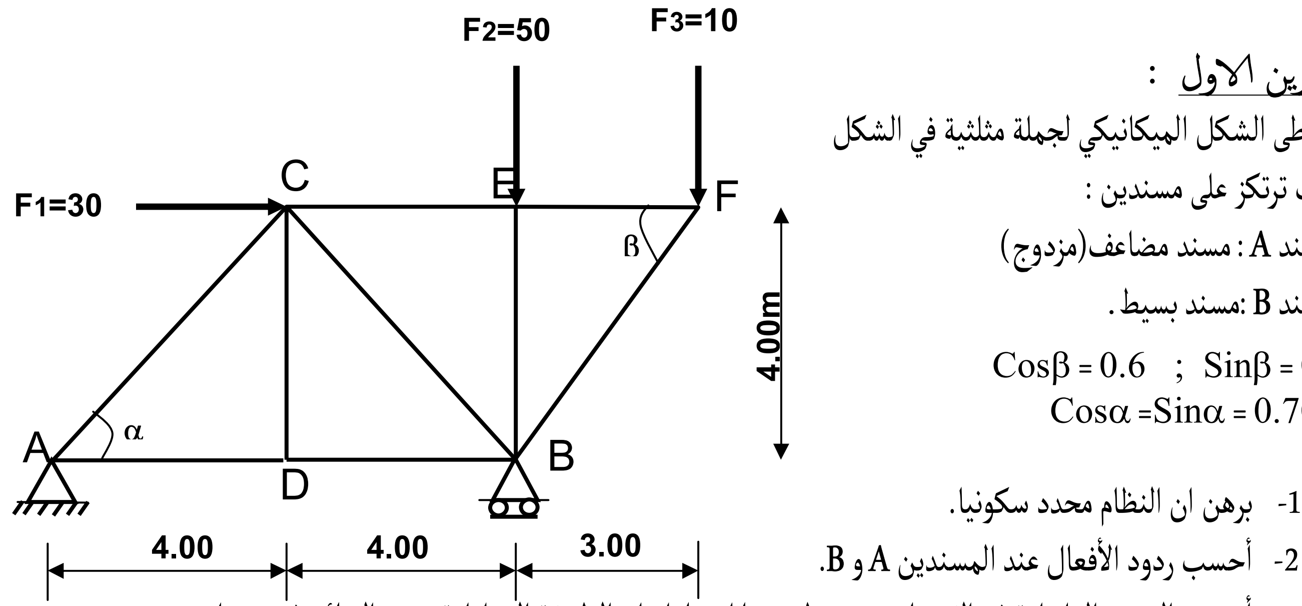
المجال : ميكانيك

الوحدة الاولى : الانظمة المثلثية

تمرين حول الأنظمة المثلثية



التمرين الاول :

يعطى الشكل الميكانيكي لجملة مثلثية في الشكل حيث ترتكز على مسندين :

المسند A : مسند مضاعف(مزدوج)

المسند B :مسند بسيط .

$Cos\beta = 0.6$; $Sin\beta = 0.8$

$Cos\alpha = Sin\alpha = 0.707$

1- برهن ان النظام محدد سكونيا.

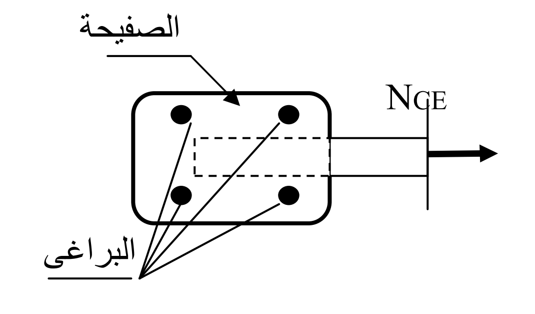
2- أحسب ردود الأفعال عند المسندين A و B.

3- أحسب الجهود الداخلية في القضبان و بين طبيعتها إعتمادا على الطريقة التحليلية. دون النتائج في جدول.

4- إذا علمت ان القضيب الأكثر تحميلا هو القضيب (EB) حيث : NEB=50 KN ، و قضبان الجملة المثلثية هي دعامة مزدوجة و الإجهاد المسموح $\overline{\sigma} = 1600 daN / cm^2$. –إستخرج من الجدول المرفق المجنب المناسب الذي يحقق المقاومة.

5- يثبت القضيب (CE) مع بقية القضبان بصفيحة بواسطة أربع(04) براغي (الشكل (2)) ، و الجهد الداخلي للقضيب هو NCE=7.5KN ، إذا علمت ان إجهاد القص المسموح به هو $\overline{\tau} = 100 daN / cm^2$.- -احسب القطر الأدنى للبراغي الذي يحقق المقاومة.

رقم المجنب	المقطع cm^2	الكتلة kg/cm^2	الأبعاد (mm) b = h	t	Ys = zs
25x3	1.42	1.11	25	3	7.21
30x3	1.74	1.36	30	3	8.35
30x4	2.27	1.78	30	4	8.78
35x4	2.67	2.09	35	4	10.00
40x4	3.08	2.42	40	4	11.20
40x5	3.79	2.97	40	5	11.60



التمرين الثاني :

يعطى الشكل الميكانيكي لجملة مثلثية في الشكل (1) حيث ترتكز على مسندين :

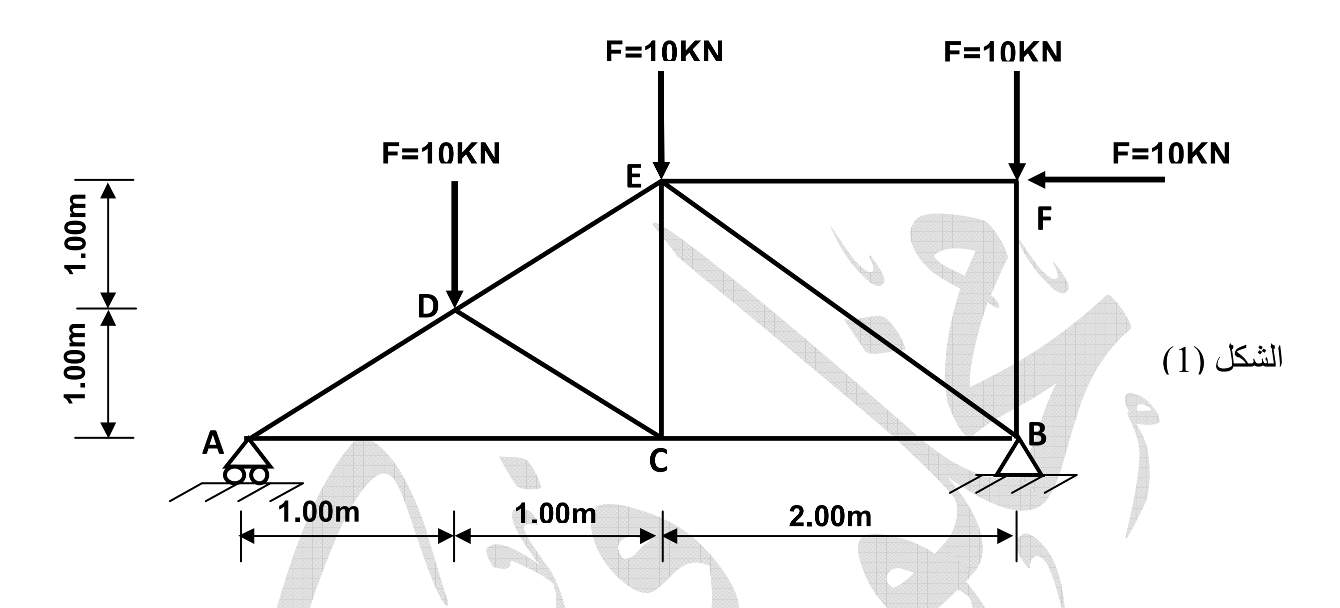
المسند A : مسند بسيط ،　　　المسند B : مسند مضاعف(مزدوج).

1- برهن ان النظام محدد سكونيا و أحسب ردود الأفعال عند المسندين A و B.

2- أحسب الجهود الداخلية في القضبان و بين طبيعتها إعتمادا على الطريقة التحليلية ، دون النتائج في جدول.

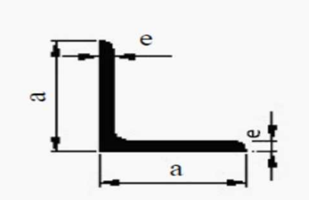
3- تحقق من مقاومة القضيب الاكثر تحميلا حيث القضبان كلها مجنبات زاوية مضاعفة من نوع (50x50x5) و

$$\overline{\sigma} = 1600 daN / cm^2$$



الشكل (1)

المجنب L	الأبعاد		المقطع (cm²)
	a (mm)	e (mm)	
(20×20×3)	20	3	1.12
(25×25×3)	25	3	1.42
(30×30×3)	30	3	1.74
(40×40×4)	40	4	3.08
(50×50×5)	50	5	4.80
(60×60×6)	60	6	6.91



الجدول المرفق

التمرين الثالث :

يعطى الشكل الميكانيكي المحدد سكونيا لجملة مثلثية في الشكل (1) حيث ترتكز على مسندين :

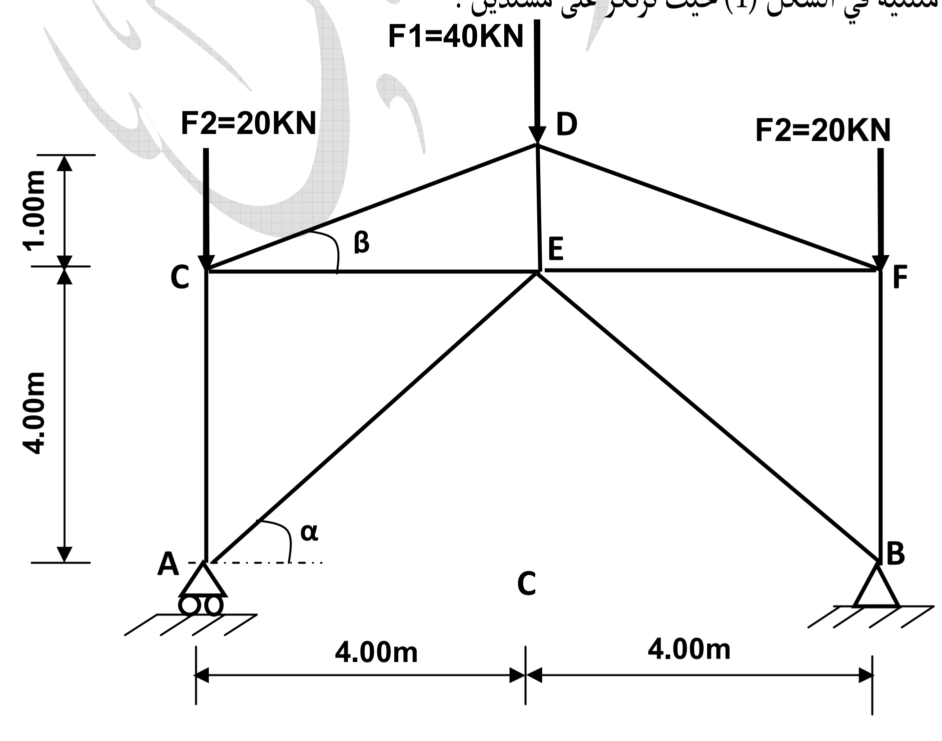
المسند A : مسند بسيط ،

المسند B : مسند مضاعف(مزدوج).

Cos α =Sin α = 0.707

$Cos\, \beta = 0.970$

$Sin\, \beta = 0.2425$



الشكل (1)

المطلوب :

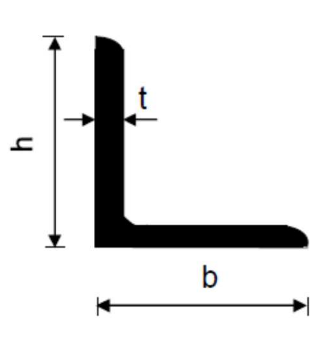
1- أحسب ردود الأفعال عند المسندين A و B.

2- أحسب الجهود الداخلية في القضبان و بين طبيعتها إعتمادا على الطريقة التحليلية ، دون النتائج في جدول.

3- قضبان الجملة المثلثية هي مجنح زاوي مضاعف من نوع L(35x4) ، تحقق من مقاومة القضبان حيث Nmax =NCD=82.46KN و الإجهاد المسموح به هو $\overline{\sigma} = 1600 daN\ /cm^2$.

4- احسب تقلص القضيب CD يعطى معامل المرونة الطولي $E = 2\cdot 10^6 daN\ /cm^2$.

رقم المجنب	المقطع cm^2	الكتلة kg/cm^2	الأبعاد (mm)		
			b = h	t	Ys = zs
25x3	1.42	1.11	25	3	7.21
30x3	1.74	1.36	30	3	8.35
30x4	2.27	1.78	30	4	8.78
35x4	2.67	2.09	35	4	10.00
40x4	3.08	2.42	40	4	11.20
40x5	3.79	2.97	40	5	11.60



التمرين الرابع :

بغية تحديد المجنب المناسب للهيكل الحامل لسقف تغطية قاعة الرياضة إقترح المهندس الهيكل الموضح في الشكل :

1- هل النظام محدد سكونيا ؟.إذا كانت الإجابة بالنفي ماذا تقترح ؟

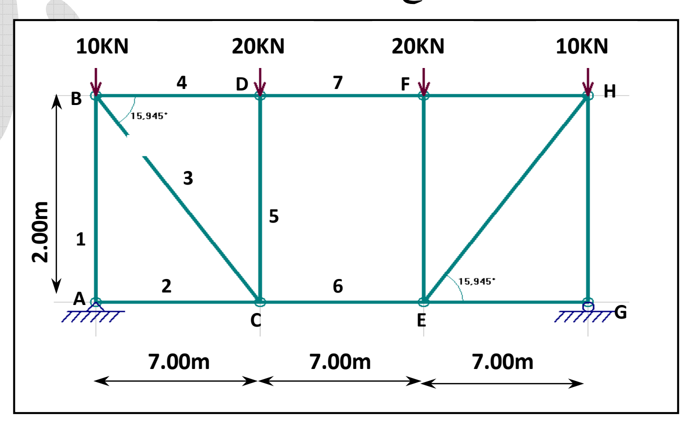
2- أعد رسم الشكل موضحا الحل الذي أقترحته. و أحسب ردود الأفعال في المسندين A و G.

3- أحسب الجهود الداخلية في القضبان بإستعمال طريقة عزل العقد ، و دون النتائج في جدول.

4- أحسب مساحة المقطع العرضي للقضيب BC ،علما أن NBC=74KN. و الإجهاد المسموح $\overline{\sigma} = 1600 daN / cm^2$

5- احسب إستطالة القضيب BC علما ان معامل مرونته $E = 2\cdot 10^6 daN / cm^2$

ملاحظة : (من الناحية التقنية الحل المقترح يكون في المنطقة المحددة بالعقد C-D-F-E)



حلول التمارين

حل التمرين الاول:

1- تحديد طبيعة النظام :

b=9 n = 6 b = 2(n) – 3 = 2(6) – 3 = 9 النظام محدد سكونيا

2- حساب ردود الأفعال :

$\sum F/x=0 \Rightarrow \boxed{H_A=30KN} \longrightarrow (1)$

$\sum F/y=0 \Rightarrow V_A+V_B=60\ KN \longrightarrow (2)$

$\sum M/A=0 \Rightarrow -V_B(8)+10(11)+50(8)+30(4)=0$

$$V_B=\frac{110+400+120}{8}=\frac{630}{8}=78.75KN \Rightarrow \boxed{V_B=78.75KN}$$

$\sum M/B=0 \Rightarrow V_A(8)+30(4)+10(3)=0$

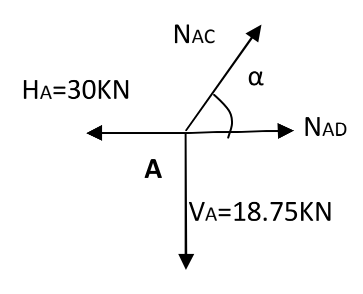
$$V_A=\frac{-120-30}{8}=\frac{-150}{8}=-18.75KN \Rightarrow \boxed{V_A=-18.75KN}$$

- يمكن أخذ VA=+18.75KN. لكن يكون رد الفعل في المسند A نحو الأسفل.

3- حساب الجهود الداخلية :

العقدة A :

$\sum F/y=0 \Rightarrow N_{AC}Sin\alpha - V_A=0$

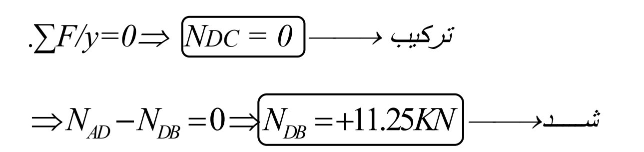


$$N_{AC}=\frac{V_A}{Sin\alpha}=\frac{18.75}{0.707}=+26.52KN \Rightarrow \boxed{N_{AC}=+26.52KN} \longrightarrow \text{شد}$$

$\sum F/x=0 \Rightarrow N_{AD}+N_{AC}Cos\alpha-H_A=0 \Rightarrow N_{AD}=H_A - N_{AC}Cos\alpha$

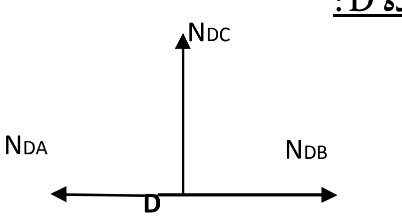
$N_{AD}=30 - 26.52(0.707)$ $\boxed{N_{AD}=+11.25KN} \longrightarrow$ شد

العقدة D :

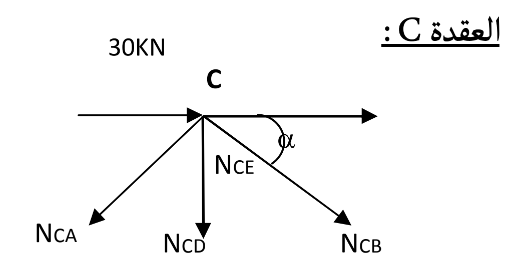


$\sum F/y=0 \Rightarrow \boxed{N_{DC}=0} \longrightarrow$ تركيب

$\Rightarrow N_{AD}-N_{DB}=0 \Rightarrow \boxed{N_{DB}=+11.25KN} \longrightarrow$ شد



العقدة C :



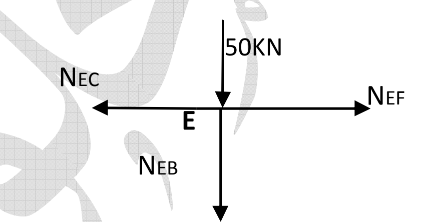
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{CD} - N_{CB}Sin\alpha - N_{CA}Sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_{CB} = -\frac{N_{CA}Sin\alpha}{Sin\alpha} = -N_{CA} \quad \boxed{N_{CB} = -26.52KN} \longrightarrow \text{إنظغاط}$$

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow +30 + N_{CE} + N_{CB}Cos\alpha - N_{CA}Cos\alpha = 0$$

$$N_{CE} = (N_{CA} - N_{CB})Cos\alpha - 30 = (26.52 + 26.52)(0.707) - 30 = +7.5KN \quad \boxed{N_{CE} = +7.50KN} \longrightarrow \text{شـــد}$$

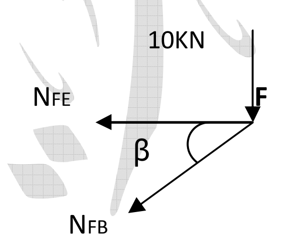
العقدة E :



$$\sum Fx = 0 \Rightarrow N_{EF} - N_{EC} = 0 \Rightarrow N_{EF} = N_{EC} = +7.50KN \quad \boxed{N_{EF} = +7.50KN} \longrightarrow \text{شـــد}$$

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow -N_{EB} - 50 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{EB} = -50KN} \longrightarrow \text{إنظغـاط}$$

العقدة F :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 - N_{FB}Sin\beta = 0 \Rightarrow N_{FB} = \frac{10}{Sin\beta}$$

$$\boxed{N_{FB} = -12.5KN} \longrightarrow \text{إنظغـاط}$$

4- جدول النتائج :

نوع التحريض	الشدة (KN)	القضيـب
شــد	26.52	AC
شــد	11.25	AD
تركيـب	0.	CD
شــد	11.25	DB
شــد	7.5	CE
إنظغــاط	26.52	CB
إنظغــاط	50	EB
شــد	7.5	EF
إنظغــاط	12.5	FB

5- تحديد المجنب المناسب :

شرط المقاومة

$$\sigma = \frac{N_{EB}}{2 \cdot S} \leq \overline{\sigma} \Rightarrow S \geq \frac{N_{EB}}{2 \cdot \overline{\sigma}} = \frac{50 \cdot 10^2}{2 \cdot 1600} = 1.56cm^2$$

من الجدول المجنب المناسب هو (30 x 3) $S=1.74cm^2$

6- حساب القطر الأدنى للبراغي :

شرط المقاومة $\tau = \frac{N_{CE}}{4 \cdot S} \leq \bar{\tau}$

$$\tau = \frac{N_{CE}}{4 \cdot S} = \frac{N_{CE}}{4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} \right)} = \frac{N_{CE}}{\pi \cdot D^2} \leq \bar{\tau} \Rightarrow D \geq \sqrt{\frac{N_{CE}}{\pi \cdot \bar{\tau}}}$$

$$D \geq \sqrt{\frac{7.5 \cdot 10^2}{3.14 \times 100}} = 1.55cm = 15.5mm$$

يمكن حساب المساحة S ثم قطر البرغي D

$$S \geq \frac{N_{CE}}{4 \cdot \bar{\tau}} = \frac{750}{4 \cdot 100} = 1.875cm^2 \qquad S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \Rightarrow D \geq \sqrt{\frac{4 \cdot S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 11875}{3.14}} = 1.55cm$$

ناخذ D=16mm

حل التمرين الثاني:

المسألة الأولى :

1- تحديد طبيعة النظام :

النظام محدد سكونيا $b = 2(n) - 3 = 2(6) - 3 = 9 \quad n = 6 \quad b = 9$

2- حساب ردود الأفعال :

$\sum F/x = 0 \Rightarrow$ $\boxed{H_A = 10KN}$ $\longrightarrow (1)$

$\sum F/y = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 30\ KN \longrightarrow (2)$

$\sum M/A = 0 \Rightarrow -V_B(4) - 10(2) + 10(4) + 10(42) + 10(1) = 0$

$$V_B = \frac{40 + 20 + 10 - 20}{4} = \frac{50}{4} = 12.5KN \Rightarrow \boxed{V_B = 12.50KN}$$

$\sum M/B = 0 \Rightarrow V_A(4) - 10(3) - 10(2) - 10(2) = 0$

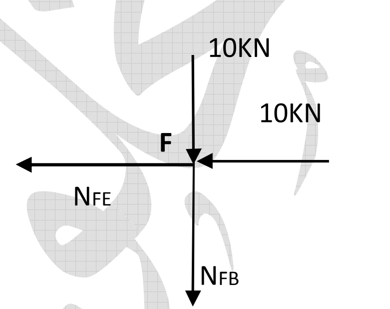
$$V_A = \frac{30 + 20 + 20}{4} = \frac{70}{4} = 17.5KN \Rightarrow \boxed{V_A = -17.50KN}$$

التحقق : $V_A + V_B = 17.50 + 12.5 = 30\ KN$

3- حساب الجهود الداخلية :

حساب الزوايا : الزوايا 45°..إذن نأخذ $\cos 45 = \sin 45 = 0.707$

العقدة A :



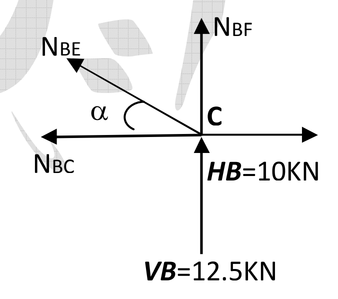
$$\sum F/y=0 \Rightarrow \quad N_{AD}Sin\alpha + V_A=0 \quad N_{AD} = -\frac{V_A}{Sin\alpha} = -\frac{17.50}{0.707} = -24.75KN$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{AD}=-24.75KN} \longrightarrow \text{إنضغاط}$$

$$\sum F/x=0 \Rightarrow \quad N_{AC}+N_{AD}Cos\alpha=0 \Rightarrow N_{AC}= -\ N_{AD}Cos\alpha$$

$$N_{AC} = 24.75(0.707) \qquad \boxed{N_{AC} = +17.50KN} \longrightarrow \text{شــد}$$

العقدة F :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{FB} - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{FB} = -10KN} \longrightarrow \text{انضغاط}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{FE} - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{FE} = -10KN} \longrightarrow \text{انضغاط}$$

العقدة B :

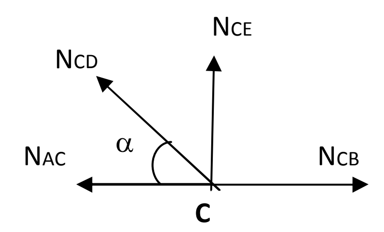
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_B + N_{BF} + N_{BE}Sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_{BE} = \frac{-12.5+10}{0.707} \Rightarrow \boxed{N_{BE} = -3.54KN} \longrightarrow \text{إنظغاط}$$

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow -N_{BC} - N_{BE}Cos\alpha + 10 = 0$$

$$N_{BC} = 3.54(0.707) + 10 \Rightarrow \boxed{N_{BC} = 12.5KN} \longrightarrow \text{شــد}$$

العقدة C :

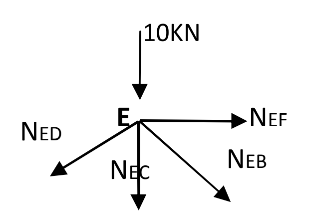


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{CB} - N_{AC} - N_{CD}\cos\alpha = 0$$

$$N_{CD} = \frac{12.5-17.5}{0.707} \Rightarrow \boxed{N_{CD} = -7.07KN} \longrightarrow \text{إنظغـاط}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{CE} + N_{CD}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{N_{CE} = +5KN} \longrightarrow \text{شـد}$$

العقدة E :



$$\sum Fx=0 \Rightarrow N_{EF}+N_{EB}\cos\alpha-N_{ED}\cos\alpha=0 \Rightarrow N_{ED}=\frac{-10-3.54(0.707)}{0.707}$$

$N_{EF}=-17.68KN \longrightarrow$ إنضغاط

نوع التحريض	الشدة (KN)	القضيب
شــد	17.5	AC
إنضغاط	24.75	AD
إنضغاط	10	FE
إنضغاط	10	FB
إنضغاط	3.54	BE
شد	12.5	BC
إنظغــاط	7.07	CD
شــد	5	CE
إنظغــاط	17.68	ED

4- التحقق من المقاومة :

شرط المقاومة $\sigma=\frac{N_{max}}{2\cdot S}\leq\overline{\sigma}$

$$\sigma=\frac{N_{max}}{2\cdot S}=\frac{N_{AD}}{2\cdot S}=\frac{24.75\times100}{2\times4.80}=257.81daN/cm^2$$

$\sigma=257.81daN/cm^2\leq\overline{\sigma}=1600daN/cm^2$ المقاومة محققة

حل التمرين الثالث:

1- حساب ردود الأفعال :

$\sum F/x=0 \Rightarrow \boxed{H_B=0KN} \longrightarrow (1)$

$\sum F/y=0 \Rightarrow V_A+V_B=80\ KN \longrightarrow (2)$

النظام متناظر من حيث الأبعاد و الحمولات و بالتالي :

$$V_A=V_B=\frac{\sum Fy}{2}=\frac{80}{2}=40KN \Rightarrow \boxed{V_A=40\ KN}\quad \boxed{V_B=40\ KN}$$

التحقق : $VA + VB = 17.50 + 12.5 = 30\ KN$

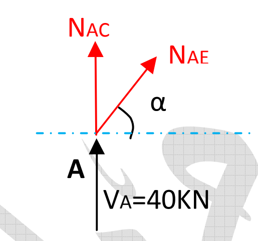
7- حساب الجهود الداخلية :

العقدة A :

$\sum Fx = 0 \Rightarrow N_{AE} \cdot \cos\alpha = 0 \rightarrow N_{AE} = 0 \longrightarrow$ تركيبي

$\sum Fy = 0 \Rightarrow N_{AC} + V_A + N_{AE} \cdot \sin\alpha = 0$

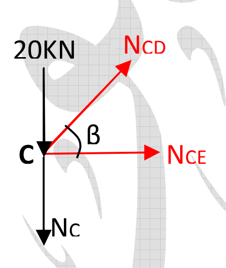
$\Rightarrow N_{AC} = -V_A \rightarrow N_{AE} = -40KN \longrightarrow$ إنضغاط



العقدة C :

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{CD} \cdot \sin\beta - N_{CA} - 20 = 0$

$\Rightarrow N_{CD} = \frac{+(-40)+20}{0.2425} \rightarrow N_{CD} = -82.47KN \longrightarrow$ إنضغاط



$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_{CE} + N_{CD} \cdot \cos\beta = 0 \Rightarrow N_{CE} = -N_{CD} \cdot \cos\beta$

$\Rightarrow N_{CE} = -(-82.47)(0.970) \rightarrow N_{CD} = 80KN \longrightarrow$ شـد

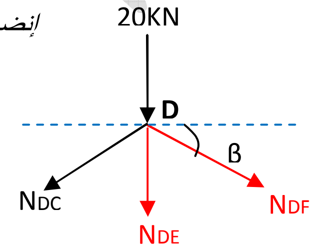
العقدة D :

$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{DF} = N_{DC} \Rightarrow N_{DC} = -82.47KN \longrightarrow$ إنضغاط

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{DE} - 20 - N_{DC} \cdot \sin\beta - N_{DC} \cdot \sin\beta = 0$

$N_{DE} = 20 + (-82.47 - 82.47)(0.2425)$

$\Rightarrow N_{DE} = 0KN \longrightarrow$ تركيبي



بإستغلال التناظر نجد باقي الجهود الداخلية في القضبان :

$NBF = NAC = -40KN$ (إنضغــاط)

$NBE = NAE = 0\ KN$ (تركيبي)

$NBF = NAC = -40KN$ (إنضغــاط)

$NBF = NAC = -40KN$ (إنضغــاط)

جدول النتائج :

القضيـب	AC	AE	CD	CE	DE	FE	FD	BE	BF
الشدة (KN)	40	0	82.47	80	0	80	82.47	0	40

نوع التحريض	إنضغاط	تركيبي	إنضغاط	شد	تركيبي	شد	إنضغاط	تركيبي	إنضغاط

3- التحقق من المقاومة :

شرط المقاومة　　　$\sigma^{\max} \leq \overline{\sigma}$

القضبان المستعملة هي مجنح زاوي مضاعف من نوع L(35x4) منه $S=2.67cm^2$

$$\sigma^{\max} = \frac{N^{\max}}{2 \cdot S} = \frac{82.46 \cdot 10^2}{2 \times (2.67)} = 1544.19daN/cm^2$$

$$\sigma^{\max} = 1544.19daN/cm^2 \leq \overline{\sigma} = 1600daN/cm^2$$

إدن شرط المقاومة محقق

4- حساب تقلص القضيب CD :

$$\Delta L = \frac{N \times L}{E \times (2S)} = \frac{82.46 \cdot 10^2 \times 412}{2.10^6 \times (2.2.67)} = 0.32cm$$

$$L_{CD} = \sqrt{4^2 + 1^2} = 4.12m$$

حل التمرين الرابع:

1- التأكد من أن النظام محدد سكونيا :

.b=12　　n=8

لكي يكون النظام محدد سكونيا يجب أن يتحقق الشرط :　　　$b = 2n - 3 = 2 \times 8 - 3 = 13$

- إذن العلاقة غير محققة و النظام غير محدد سكونيا.

الإقتراح : لكي تكون العلاقة صحيحة يجب أن يكون عدد القضبان b=13، لذا يجب إضافة قضيب آخر بين العقدة CF أو DE

2- رسم الشكل المقترح :

- **حساب ردود الأفعال :**

$$\sum F/x = 0 \Rightarrow \boxed{H_A = 0} \longrightarrow (1)$$

$.\sum F/y=0 \Rightarrow V_A+V_G=60\ KN \longrightarrow (2)$

$.\sum M/A=0 \Rightarrow -VG(21)+10(21)+20(14)+20(7)=0$

$$V_G=\frac{210+280+140}{21}=\frac{630}{21}=30KN \Rightarrow \boxed{V_G=30KN}$$

$.\sum M/G=0 \Rightarrow VA(21)-10(21)-20(14)-20(7)=0$

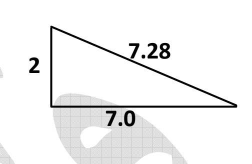
$$V_A=\frac{210+280+140}{21}=\frac{630}{21}=30KN \Rightarrow \boxed{V_A=30KN}$$

- يمكن إستعمال تناظر الشكل من حيث الأبعاد و الحمولات في حساب ردود الأفعال .

3- حساب الجهود الداخلية :

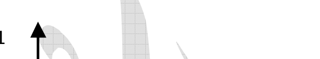
- حساب الزوايا :

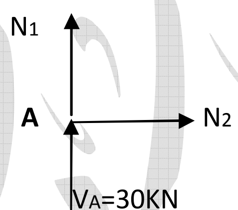
$BC=\sqrt{(7)^2+(2)^2}=\sqrt{53}=7.28$



$Cos\alpha=\frac{7}{7.28}=0.96. \quad Sin\alpha=\frac{2}{7.28}=0.27.$

- **العقدة A :**





$.\sum F/x=0 \Rightarrow \boxed{N_2=0} \longrightarrow$ تركيب

$\sum F/y=0 \Rightarrow \quad N_1+VA=0 \Rightarrow \boxed{N_1=-30KN} \longrightarrow$ إنضغاط

- **العقدة B :**

10KN, B, N4, α, N1, N3

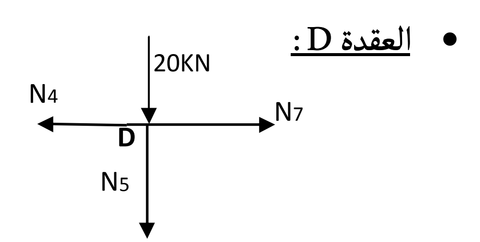
$.\sum F/y=0 \Rightarrow \quad -N_1-N_3Sin\alpha-10=0 \Rightarrow N_3=\frac{-10+30}{\sin\alpha}=\frac{20}{0.27}=74.07KN$

$\boxed{N_3=74.07KN} \longrightarrow$ شـــد

$\sum Fx=0 \Rightarrow N_4+N_3\cos\alpha=0 \Rightarrow N_4=-N_3\cos\alpha=-74.07x(0.96)=-71.10KN$

$\boxed{N_4=-71.10KN} \longrightarrow$ إنظغـاط

- **العقدة D :**



$\sum Fx=0 \Rightarrow N_7-N_4=0 \Rightarrow N_7=N_4=-71.10KN \quad \boxed{N_7=-71.10KN} \longrightarrow$ إنظغـاط

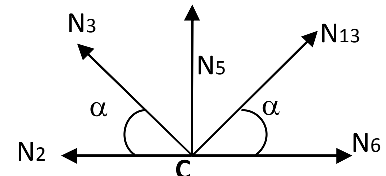
$\sum Fy=0 \Rightarrow -N_5-20=0 \Rightarrow N_5=-20KN \quad \boxed{N_5=-20KN} \longrightarrow$ إنظغـاط

- **العقدة C :**

$\sum Fy=0 \Rightarrow N_5+N_3\sin\alpha+N_{13}\sin\alpha=0 \quad N_{13}=\frac{-N_5-N_3\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-(-20)-(20)}{0.27}=0 \quad \boxed{N_{13}=0} \longrightarrow$ تركيب

$\sum Fx=0 \Rightarrow N_6+N_8\cos\alpha-N_2-N_3\cos\alpha=0 \quad N_6=N_3\cos\alpha=+71.10KN$

$\boxed{}$



$N_6 = +71.10KN \longrightarrow$ شــد

بتطبيق مبدأ التناظر نجد :

$N_1=N_{12}= -30\ KN$ $\qquad N_4=N_{11}= -71.10\ KN$ $\qquad N_2=N_9 = 0\ KN$

$N_5=N_8 = -20\ KN$ $\qquad N_3=N_{10}= +74.07\ KN$

- تدوين النتائج في الجدول :

نوع التحريض	الشدة (KN)	القضيـب
إنظغـــاط	30	1
تركيـب	0	2
شــد	74.07	3
إنظغـــاط	71.10	4
إنظغـــاط	20	5
شــد	71.10	6
إنظغـــاط	71.10	7
إنظغـــاط	20	8
تركيــــب	0	9
شــد	74.07	10
إنظغـــاط	71.10	11
إنظغـــاط	30	12
تركيــــب	0	13

4- حساب مساحة المقطع العرضي للقضيب BC :

$N_{\max} = 74KN \qquad \overline{\sigma} = 1600daN / cm^2$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{S} \leq \overline{\sigma} \Rightarrow S \geq \frac{N}{\overline{\sigma}} = \frac{7400}{1600} \qquad S \geq 4.62cm^2$$

5- حساب إستطالة للقضيب BC :

$$L_{BC} = \sqrt{(7)^2 + (2)^2} = 7.28m$$

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot S} = \frac{7400 \times 728}{2000000 \times 4.62} = 0.583cm = 5.83mm$$